Tomasz Waleń
Treść zadania, Opracowanie

Paweł Parys
Program

OI, Etap II, dzień drugi, 08.02.2007

Tetris Attack

Ostatnimi czasy w Bajtocji bardzo popularną grą stała się łamigłówka „Tetris Attack". Jej uproszczona wersja ma następującą postać: Gracz otrzymuje do dyspozycji stos, na którym umieszczono $2n$ elementów (jeden na drugim), oznaczonych n różnymi symbolami. Przy tym każdym symbolem są oznaczone dokładnie dwa elementy na stosie. Ruch gracza polega na zamianie dwóch sąsiednich elementów miejscami. Jeśli w wyniku zamiany na stosie sąsiadują ze sobą elementy oznaczone identycznymi symbolami, to w „magiczny" sposób znikają, a elementy znajdujące się powyżej spadają w dół (być może powodując kolejne zniknięcia). Celem gracza jest opróżnienie stosu w jak najmniejszej liczbie ruchów.

Zadanie

Napisz program, który:

- *wczyta ze standardowego wejścia opis początkowej zawartości stosu,*
- *obliczy rozwiązanie wymagające minimalnej liczby ruchów,*
- *wypisze znalezione rozwiązanie na standardowe wyjście.*

Wejście

W pierwszym wierszu standardowego wejścia znajduje się jedna liczba całkowita n, $1 \leqslant n \leqslant 50\,000$. W kolejnych $2n$ wierszach zapisana jest początkowa zawartość stosu. Wiersz $i+1$-szy zawiera jedną liczbę całkowitą a_i — symbol elementu znajdującego się na wysokości i ($1 \leqslant a_i \leqslant n$). Każdy symbol występuje na stosie **dokładnie** *2 razy. Na początku żadne dwa identyczne symbole nie występują obok siebie. Ponadto dane testowe są tak dobrane, że istnieje rozwiązanie zawierające nie więcej niż 1 000 000 ruchów.*

Wyjście

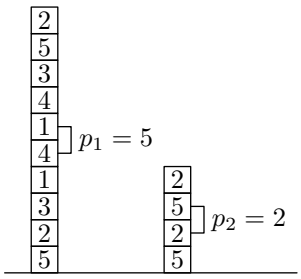
Na standardowym wyjściu należy wypisać opis rozwiązania, wymagającego minimalnej liczby ruchów. Pierwszy wiersz powinien zawierać jedną liczbę całkowitą m — długość najkrótszego rozwiązania. Kolejne m wierszy powinno zawierać opis rozwiązania, czyli ciąg m liczb całkowitych $p_1, \ldots, p_m$, po jednej w każdym wierszu. Wartość p_i oznacza, że w i-tym ruchu gracz zdecydował o zamianie elementów, znajdujących się na wysokościach p_i oraz $p_i + 1$.

Jeżeli istnieje wiele rozwiązań, to Twój program powinien wypisać dowolne z nich.

Przykład

Dla danych wejściowych:

```
5
5
2
3
1
4
1
4
3
5
2
```



poprawnym wynikiem jest:

```
2
5
2
```

Natomiast dla danych wejściowych:

```
3
1
```

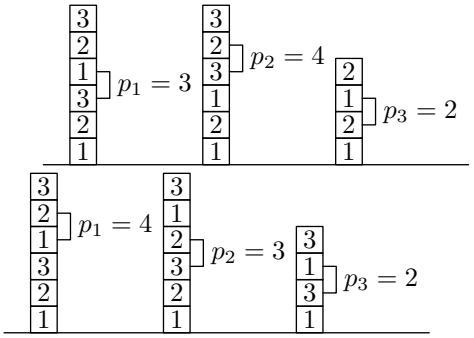
```
2
3
1
2
3
```

poprawnym wynikiem jest:

```
3
3
4
2
```

jak również:

```
3
4
3
2
```



Rozwiązanie

O zadaniu

Nazwa i pomysł zadania pochodzą od gry *Tetris Attack*[1] (gra występuje również pod nazwami *Pokemon Puzzle League* lub *Panel de Pon*). Oczywiście oryginalna gra jest bardziej skomplikowana: klocki są ułożone w dwóch wymiarach, liczba klocków oznaczonych takimi samymi symbolami nie jest ograniczona itd.

Podstawowe pojęcia

Rozpocznijmy od wprowadzenia kilku definicji, które ułatwią nam prezentację rozwiązania. Przyjmiemy konwencję, zgodnie z którą stos będziemy zapisywać od elementu na dole stosu do elementu na szczycie; na przykład ciąg: 1 3 2 1 2 3 oznacza stos, w którym element 1 znajduje się na samym dole, natomiast 3 — na szczycie stosu.

Symbole odróżniające klocki będziemy nazywać *kolorami*, zgodnie z konwencją przyjętą w oryginalnych grach.

Powiemy, że para kolorów (a,b) tworzy *inwersję*, jeśli klocki w kolorach a, b występują na stosie w następującej kolejności:

$$\ldots\ a\ \ldots\ b\ \ldots\ a\ \ldots\ b\ \ldots$$

Przykładowo na stosie:

1 2 3 2 1 3

występują inwersje $(1,3)$ oraz $(2,3)$.

Układ na stosie nazwiemy *stabilnym*, jeśli na sąsiednich pozycjach nie występują jednakowe kolory.
W stabilnym układzie o n kolorach możemy mieć od 1 do $n(n-1)/2$ inwersji. Najmniejsza liczba inwersji występuje w układzie:

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ n-2\ n\ n-1\ n\ n-1\ n-2\ \ldots\ 2\ 1$$

natomiast największą liczbę inwersji ma układ:

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ n-1\ n\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ n-1\ n$$

Rozwiązanie wzorcowe

Dla rozwiązania zadania kluczowe są następujące spostrzeżenia:

- pojedynczy ruch zmniejsza liczbę inwersji co najwyżej o 1;
- jeśli stos zawiera układ stabilny i nie jest pusty, to zawsze można wykonać ruch, który zmniejszy liczbę inwersji o 1;

[1] Więcej informacji o grze można znaleźć na stronie `http://www.tetrisattack.net/`

- wykonując tylko ruchy zmniejszające liczbę inwersji o 1, otrzymamy rozwiązanie optymalne, czyli wymagające minimalnej liczby ruchów.

Pierwsze, a zatem także i trzecie z powyższych stwierdzeń, są oczywiste. Pozostaje wykazać stwierdzenie drugie — poniżej udowodnimy twierdzenie, w którym pokazujemy, jak znajdować ruchy zmniejszające liczbę inwersji. Twierdzenie to stanie się podstawą przedstawionego dalej algorytmu rozwiązania wzorcowego.

Twierdzenie 1 *Niech $a_1,\ldots,a_{2n}$ oznacza stos elementów, w którym każdy z n kolorów występuję dokładnie 2 razy. Zakładamy, że układ jest stabilny, tzn. $a_i \neq a_{i+1}$, dla $1 \leqslant i < 2n$. Istnieje ruch, którego wykonanie powoduje zmniejszenie liczby inwersji o 1.*

Dowód W większości wypadków istnieje wiele ruchów o takiej własności, jednak my wyznaczymy ruch, którego wykonanie pozwoli na efektywne rozwiązanie zadania.

Niech j oznacza maksymalny indeks $1 \leqslant j < 2n$ taki, że każdy z elementów $a_1,\ldots,a_j$ ma inny kolor. Oczywiście w ciągu $a_1,\ldots,a_{j+1}$ jakiś kolor musi się już powtórzyć, czyli istnieje indeks $1 \leqslant i \leqslant j$ taki, że $a_i = a_{j+1}$.

Łatwo zauważyć, że kolory a oraz b występujące odpowiednio na pozycjach a_i oraz a_j tworzą inwersję:

kolor:	$\ldots$	a	$\ldots$	b	a	$\ldots$	b	$\ldots$
indeks:		i		j	$j+1$		$> j+1$	

Możemy ją zlikwidować, zamieniając sąsiednie elementy o indeksach j oraz $j+1$. ■

W rozwiązaniu wzorcowym będziemy kolejno eliminować inwersje, w których występuje pierwszy powtarzający się kolor — jak w dowodzie twierdzenia. Aby efektywnie przeprowadzić tę procedurę, stworzymy dwa stosy, pomiędzy które rozdzielimy zadane elementy:

- D — stos ten będzie zawierał początkowe, zbadane elementy układu, wśród których nie występują powtarzające się kolory — początkowo stos ten jest pusty.
- S — stos ten będzie zawierał resztę elementów tworzących aktualny układ — początkowo stos ten zawiera wszystkie elementy, ułożone w kolejności odwrotnej do wejściowej, tzn. a_1 znajduje się na szczycie stosu S.

W trakcie algorytmu analizujemy kolejno elementy x pobierane ze stosu S. Jeśli kolor elementu x nie występuje jeszcze w D, to odkładamy element x na szczyt stosu D. W przeciwnym przypadku możemy zastosować twierdzenie, wykonując ruch dla x i jego poprzednika, likwidując w ten sposób jedną inwersję. W kolejnych ruchach eliminujemy kolejne inwersje, w których występuje kolor x, przesuwając ten element w głąb stosu D (w rzeczywistości będziemy przekładać elementy ze stosu D do stosu S), aż do momentu, gdy spotka on swoją „parę" i zniknie z układu. Warto zauważyć, że wykonywane przy okazji przesuwania x zamiany są (podobnie jak pierwsza) również zamianami „pierwszego powtarzającego się koloru" i każda z nich powoduje zmniejszenie liczby inwersji o 1. Opisane postępowanie jest realizowane w poniższym algorytmie:

```
1:  D := ∅;
2:  S := { stos elementów w kolejności a_{2n}, a_{2n-1}, ..., a_1 };
3:  while S ≠ ∅ do
4:  begin
5:    x := S.Pop; { kolejny element z S }
6:    if x ∉ D then { nowy kolor, więc dodajemy do D }
7:      D.Push(x);
8:    else { kolor x już występuje w D }
9:    begin
10:     j := LiczbaElementów(D);
11:     y := D.Pop;
12:     if x ≠ y then { jeśli kolory są różne, to wykonujemy zamianę }
13:     begin
14:       { print: zamień (j, j+1); }
15:       S.Push(y); S.Push(x); { odłóż elementy x i y z powrotem na stos S }
16:     end
17:   end
18: end
```

Procedury *Pop* i *Push* powodują odpowiednio pobranie elementu ze szczytu stosu i włożenie elementu na szczyt stosu.

Czas działania powyższego algorytmu wynosi $O(n+k)$, gdzie k to liczba inwersji w ciągu podanym na wejściu — przypomnijmy, że k może wynosić od $O(1)$ do $O(n^2)$. Jest to jednak algorytm o bardzo dobrych parametrach, ponieważ składnika k w złożoności i tak uniknąć się nie da — jest to rozmiar informacji, które trzeba wypisać jako wynik działania algorytmu.

Inne rozwiązania

Istnieje wiele rozwiązań opartych na schemacie:

```
1: while LiczbaInwersji > 0 do
2: begin
3:    wyznacz ruch, który zmniejsza liczbę inwersji o 1;
4:    wykonaj ten ruch;
5:    zaktualizuj zawartość stosu (w szczególności usuń znikające elementy);
6: end
```

W schemacie tym kryją się dwa potencjalne źródła nieefektywności algorytmu. Po pierwsze, czasochłonne może być „naiwne" poszukiwanie ruchu zmniejszającego liczbę inwersji. Po drugie, nieprzemyślane symulowanie aktualnego stanu stosu, w szczególności usuwanie "znikających elementów", także może powodować wydłużenie obliczeń. Częściowo niedogodności te można zmniejszyć, odpowiednio dobierając kolejne ruchy, na przykład poszukując ich możliwie blisko szczytu stosu. Niestety są to tylko heurystyki i w pesymistycznym przypadku bazujące na nich rozwiązania mają jednak złożoność $O(n^2+k)$.

Testy

Poniższa tabelka przedstawia zestawienie testów użytych do oceny rozwiązań. Parametr w oznacza rozmiar optymalnego rozwiązania, a n — liczbę kolorów w danych wejściowych.

Nazwa	w	n	Opis
tet1.in	78	40	test losowy
tet2.in	406	50	test losowy
tet3.in	6624	200	test losowy
tet4.in	19956	1000	test losowy
tet5.in	135926	1200	test losowy
tet6.in	663589	4000	test losowy
tet7.in	657197	4500	test losowy
tet8.in	998360	5000	test losowy
tet9.in	999986	5000	test losowy
tet10a.in	999614	5000	test losowy
tet10b.in	1000000	2000	test z największą odpowiedzią
tet11a.in	830998	42000	test specjalny
tet11b.in	998991	10000	test specjalny
tet12.in	592528	50000	test specjalny
tet13.in	759921	50000	test specjalny
tet14.in	472199	50000	test specjalny
tet15a.in	905241	50000	test specjalny
tet15b.in	1	50000	maksymalny test z odpowiedzią 1

Testy specjalne to losowe testy uzupełnione o duży fragment typu $1\ 2\ \ldots\ k\ \ldots\ k\ \ldots\ 2\ 1$ oraz wiele (krótkich) fragmentów typu $1\ 2\ \ldots\ p\ 1\ 2\ \ldots\ p$.